Journal of the Korean Society of Marine Engineering, Vol. 42, No. 7 pp. 566~571, 2018
J. Korean Soc. of Marine Engineering (JKOSME)
https://doi.org/10.5916/jkosme.2018.42.7.566

ISSN 2234-7925 (Print)
ISSN 2234-8352 (Online)
Original Paper

특이 섭동 시간지연 시스템의 안정성 분석

김범수[1] · 권재성†

(Received November 6, 2017 ; Revised May 25, 2018 ; Accepted September 18, 2018)

Stability analysis for singularly perturbed time delayed system

Beomsoo Kim[1] · Jaesung Kwon†

요약: 본 연구에서는 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템의 안정성을 다루기 위해서 리아프노프-크라보스키 범함수에 기반한 선형행렬 부등식 기법을 통해서 안정한 조건을 제시한다. 먼저 시간 지연이 있는 특이섭동 시스템 전체에 관해 안정 조건을 구한다. 그리고 특이 섭동 시스템을 Chang 변환 기법을 이용해서 저차의 빠른 부시스템과 느린 부시스템으로 완전히 분리한 후에 각 부시스템에서의 안정 조건을 제시함으로써 적은 변수로 선형 행렬 부등식 문제를 효율적으로 풀 수 있음을 보인다. 마지막으로 예제 시스템을 통해 제안한 방법의 유효성과 장점을 보인다.
주제어: 시간지연, 특이섭동시스템, 안정성, 리아프노프-크라보스키 범함수, 선형 행렬 부등식

Abstract: In this paper, we propose the stability conditions for a singularly perturbed time-delayed system using Lyapunov-Krasovskii functionals and a linear matrix inequality (LMI). Further, we show that the singularly perturbed time-delayed system can be completely decoupled into a fast time-delayed subsystem and a slow time-delayed subsystem using the Chang transform and that the stability conditions for each subsystem can be efficiently derived using an LMI. This method reduces the variables in the LMI. Finally, the effectiveness and merits of the proposed approach are demonstrated through a numerical example.
Keywords: Time delay, Singularly perturbed system, Stability, Lyapunov-Krasovskii functionals, Linear matrix inequality

1. 서 론

공학, 생물학 등 많은 분야의 시스템이 시간 지연을 갖는 미분방정식으로 표현된다**[1]-[5]**. 시간 지연성분이 지연 미분방정식(DDE, Delay Differential Equation)으로 모델링 될 때 초월 특성(transcendental characteristics)에 의해 DDE는 무수히 많은 고유치를 가질 뿐만 아니라 시간 지연이 안정도에 미치는 영향을 고려해야 하며 이는 시스템 해석을 어렵게 한다.

특이 섭동 시스템은 기계적 요소와 전기적 요소가 결합된 시스템이나 매우 작은 시상수로 인한 와류(parasitic) 파라미터 등에 의해 차수가 증가된 시스템으로 느린 응답과 빠른 응답이 동시에 존재하는 다중 시간 척도(multi time scale) 특성을 갖는다. 특이 섭동 시스템은 조건수(condition number)가 큰 불량 조건(ill-condition)을 가져서 시스템 해석을 어렵게 한다. 따라서 이 문제를 회피하기 위해서 Chang 변환이나, 전체 시스템을 느린 부 시스템(slow subsystem)과 빠른(fast) 부 시스템으로 분리한 후 시스템 해석과 제어기를 설계하는 연구들이 진행되고 있다**[1][2]**.

선박에서의 방향타 안정화 설계**[6]**와 전몰형 수중익선(fully submerged hydrofoil)의 회두각 유지(course keeping) 제어**[7]** 문제를 특이섭동의 시분리(time scale separation)를 이용해서 축차된 느린 시스템과 빠른 시스템으로 분리한 후 합성제어 기법으로 안정도를 해결하는 연구가 보고되었다.

시간 지연을 갖는 특이섭동 시스템의 안정도 문제를 해결하기 위해 Lyapunov-Krasovskii 범함수를 이용하는 기법 등이 연구되어 왔다**[8]**. S. Pan *et al.* **[9]**은 다중 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템으로 분리한 후 각 시스템에서의 안정도 문제를 다루었으며, Z. Shao *et al.*은**[10]** 시간 지연을 갖는 동차 특이 섭동시스템을 Lyapunov 방법을 이용해서 안정도 문제를 다루었다. B. S. Kim *et al.* **[11]**은 합성제어 기법으로 시스템을 분리한 후 놈(norm)을 이용하여 안정화 영역을 구한 후 제어입력을 구하고 Lambert W 함수를 이용해서 시스템을 해석하는 방법을 제시하였다.

본 연구에서는 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템을 Lyapunov-Krasovskii 정리와 선형 행렬 부등식을 이용하여 안정할 조건을 구한다. 선형 행렬 부등식 문제에 있어서 주

† Corresponding Author (ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2328-9826): Assistant Professor, Department of Mechanical System Engineering, Institute of Marine Industry, Gyeongsang National University, 38, Cheondaegukchi-gil, Tongyeong, Gyeongnam, 53064, Korea, E-mail: jkwon@gnu.ac.kr, Tel: 055-772-9102
1 Associate Professor, Department of Mechanical System Engineering, Gyeongsang National University, E-mail: kimbs@gnu.ac.kr, Tel: 055-772-9101
This is an Open Access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution Non-Commercial License (http://creativecommons.org/licenses/by-nc/3.0), which permits unrestricted non-commercial use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Copyright ⓒ The Korean Society of Marine Engineering

요 관점 중 하나는 가능한 적은 변수로 문제를 해결하고자 하는 것이다. 따라서 본 연구에서는 특이 섭동 시스템을 Chang 변환**[12]**을 이용하여 저차의 부 시스템으로 완전 분리한 후, 각 부 시스템에서 LMI(Linear Matrix Inequality)를 이용해서 안정할 조건을 구한 후 이를 합성하여 전체 안정할 제어 입력을 구한다. 제안된 방법은 LMI를 통해서 전체 시스템의 안정 조건을 구할 때 보다 적은 변수를 이용해서 구할 수 있다.

2. 시간지연이 있는 특이 섭동 시스템

2.1 순수 시간지연을 갖는 특이 섭동 시스템

다음과 같은 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$E_e\dot{x}(t) = Ax(t-h) \tag{1}$$

여기서 $E_e = \begin{bmatrix} I_{n1} & 0 \\ 0 & \epsilon I_{n2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$이며 $x_1(t) \in R^{n_1}$, $x_2(t) \in R^{n_2}$, $(n = n_1 + n_2)$는 각각 느린 부 시스템과 빠른 부 시스템을 나타내고, $0 < \epsilon \ll 1$ 이고, $h > 0$는 시간지연 상수이다. 그리고 $A_{11} \in R^{n_1 \times n_1}$, $A_{12} \in R^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in R^{n_2 \times n_1}$, $A_{22} \in R^{n_2 \times n_2}$ 이다.

보조 정리 1.**[13]** 알맞은 차원을 갖는 행렬 $Z_i = Z_i^T$ $(i = 1,2,3,4,5)$가 다음 **선형 행렬 부등식 (2)**를 만족하면

$$Z_1 > 0 \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 + \epsilon Z_3 & \epsilon Z_5^T \\ \epsilon Z_5 & \epsilon Z_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$\begin{bmatrix} Z_1 + \epsilon Z_3 & \epsilon Z_5^T \\ \epsilon Z_5 & \epsilon Z_2 + \epsilon^2 Z_4 \end{bmatrix} > 0$$

선형 행렬 부등식 (3)이 성립된다.

$$E_e Z_e = Z_e E_e > 0 \tag{3}$$

여기서 $Z_e = \begin{bmatrix} Z_1 + \epsilon Z_3 & \epsilon Z_5^T \\ \epsilon Z_5 & Z_2 + \epsilon Z_4 \end{bmatrix}$ 이다.

보조 정리 1과 LKF(Lyapunov-Krasovskii functionals)을 이용해서 **식 (1)** 의 안정 조건을 구하면 다음과 같다.

정리 1. 대칭 양의 정부호 행렬(Positive Definite Matrix) Q 가 존재해서 **식 (2)** 와 **선형 행렬 부등식 (4)**를 만족하면 **식 (1)** 은 점근적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} (*1) & 0 \\ 0 & -Q + hA^T E_e^{-1} A \end{bmatrix} < 0 \tag{4}$$

$$(*1) = A^T Z_e + Z_e A + h Z_e A E_e^{-1} A^T Z_e + Q$$

증명: 다음과 같이 LKF 을 선정하자.

$$V(x(t)) = V_1(x(t)) + V_2(x(t)) + V_3(x(t)) \tag{5}$$

여기서

$$V_1(x(t)) = x^T(t) E_e Z_e x(t) \tag{6}$$

$$V_2(x(t)) = \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q x(s) ds \tag{7}$$

$$V_3(x(t)) = \int_{-h}^{0} \int_{t+\theta}^{t} \dot{x}^T(s) E_e \dot{x}(s) ds d\theta \tag{8}$$

이다. Q 가 양한정(positive definite) 행렬이고 보조정리 1에 의해서 $E_e Z_e > 0$ 이므로 $V(x(t)) > 0$ 이 성립한다. **식 (6)**을 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_1(x(t)) = \dot{x}^T(t) E_e^T Z_e x(t) + x^T(t) E_e Z_e \dot{x}(t) \tag{9}$$

$$= x^T(t-h) A^T Z_e x(t) + x^T(t) Z_e A x(t-h)$$

아래와 같은 Newton-Leibniz 모델 변환

$$x(t-h) = x(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s) ds$$

을 이용하면 **식 (9)**는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{V}_1(x(t)) = \left(x(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s) ds \right)^T A^T Z_e x(t) \tag{10}$$

$$+ x^T(t) Z_e A \left(x(t) - \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s) ds \right)$$

$$= x^T(t) A^T Z_e x(t) + x^T(t) Z_e A x(t)$$

$$-2x^T(t) Z_e A \int_{t-h}^{t} \dot{x}(s) ds$$

두 번째 항인 **식 (7)**을 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_2(x(t)) = \frac{d}{dt} \int_{t-h}^{t} x^T(s) Q x(s) ds$$

$$= \frac{dt}{dt} x^T(t) Q x(t) - \frac{d(t-h)}{dt} x^T(t-h) Q x(t-h)$$

$$= x^T(t) Q x(t) - x^T(t-h) Q x(t-h)$$

마지막 항인 **식 (8)**을 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_3(x(t)) = h\dot{x}^T(t)E_e(t)\dot{x}(t) - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)E_e\dot{x}(s)ds$$
$$= hx^T(t-h)A^T E_e^{-1}Ax(t-h) - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)E_e\dot{x}(s)d\theta$$

식 **(10)**의 적분 항은 아래 부등식 형태로 유도된다.

$$-2x^T(t)Z_e A\int_{t-h}^{t}\dot{x}(s)ds \le hx^T(t)Z_e AE_e^{-1}A^T Z_e^T x(t) + \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)E_e\dot{x}(s)ds$$

식 **(5)**로 주어진 LKF의 미분은 식 **(6) -** 식 **(8)** 항을 미분한 것을 더한 결과와 같으므로 식 **(6)**의 적분항을 식 **(10)**으로 대치하면 LKF 의 미분 결과는

$$\dot{V}(x(t)) \le x^T(t)A^T Z_e x(t) + x^T(t)Z_e Ax(t) + hx^T(t)Z_e AE_e^{-1}A^T Z_e x(t) + x^T(t)Qx(t) + x^T(t-h)\left(hA^T E_e^{-1}A - Q\right)x(t-h)$$

로 된다. 여기서 $y(t) = [x^T(t)\ x^T(t-h)]^T$ 라 놓으면 $\dot{V}(x(t))$의 우변은 다음과 같이 행렬로 표현할 수 있다.

$$y^T(t)\begin{bmatrix}(1,1) & 0 \\ 0 & hA^T E_e^{-1}A - Q\end{bmatrix}y(t)$$
$$(1,1) = A^T Z_e + Z_e A + hZ_e AE_e^{-1}A^T Z_e + Q$$

여기서 $\dot{V}(x(t))$의 우변이 0 보다 작으면 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템 식 **(1)**은 점근적으로 안정하다. □

정리 1의 선형행렬부등식 문제에서 Z_i, $(i = 1,..,5)$ 와 Q가 대칭행렬이므로 $3.5n^2$개의 변수를 구하면 된다.

2.2 시간지연을 갖는 특이 섭동 시스템의 분리

다음과 같은 시간지연 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$\dot{x}(t) = A_e x(t-h) + Bu(t) \tag{11}$$

여기서

$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ \frac{1}{\epsilon}B_2 \end{bmatrix}$, $A_e = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ \frac{1}{\epsilon}A_{21} & \frac{1}{\epsilon}A_{22} \end{bmatrix}$, $u(t) \in R^m$ 이다.

작은 파라미터 ϵ이 포함된 시스템 행렬 A_ϵ 는 불량조건(ill-condition)으로서 시스템 해석을 어렵게 하고 있다. 따라서 이 불량조건 문제를 회피하기 위해서 식 **(12)**로 구성된 Chang 변환 행렬을 이용하여 **특이 섭동 시스템 식 (11)**를 ϵ와 결합된 저차의 상태 방정식과 결합되지 않은 저차화된 상태 방정식으로 완전 분리한다.

$$T = \begin{bmatrix} I-\epsilon HL & -\epsilon H \\ L & I \end{bmatrix}. \tag{12}$$

식 **(12)**에서 행렬 L, H 는 식 **(11)**의 시스템 행렬 $A_{\epsilon ij}$ $i,j = 1,2$로 이루어진 비대칭 Riccati **방정식 (13)** 및 **(14)** 의 해이다.

$$A_{\epsilon 21} - A_{\epsilon 22}L + \epsilon LA_{\epsilon 11} - \epsilon LA_{\epsilon 12}L = 0 \tag{13}$$

$$A_{\epsilon 12} - \epsilon(A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L)H - H(A_{\epsilon 22} + \epsilon LA_{\epsilon 12}) = 0. \tag{14}$$

식 **(13)**과 식 **(14)** 에서 L 과 H 를 구하기 위해서는 오차가 주어진 값 보다 작아질 때 까지 뉴턴 반복법으로 구한다**[14]**. Chang 변환의 역행렬은 완전 분리된 시스템을 원래의 시스템으로 변환하기 위해 사용되는 것으로 다음과 같이 해석적으로 구할 수 있다.

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} I & \epsilon H \\ -L & I-\epsilon LH \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Chang 변환을 통한 새로운 상태를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{bmatrix}\eta_1(t) \\ \eta_2(t)\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}x_1(t) \\ x_2(t)\end{bmatrix}. \tag{16}$$

식 **(16)**을 이용하여 시스템 식 **(11)**를 Chang 변환하면 다음과 같다**[2]**.

$$\begin{bmatrix}\dot{\eta}_1(t) \\ \epsilon\dot{\eta}_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L & 0 \\ 0 & \epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1(t-h) \\ \eta_2(t-h)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 - \epsilon HLB_1 - HB_2 \\ \epsilon LB_1 + B_2\end{bmatrix}u(t). \tag{17}$$

따라서 시스템 식 **(11)**은 다음과 같이 저차의 느린 시스템 식 **(18)**과 저차의 빠른 시스템 식 **(19)**로 완전 분리된다.

$$\dot{\eta}_1(t) = (A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L)\eta_1(t-h) + (B_1 - \epsilon HLB_1 - HB_2)u(t). \tag{18}$$

$$\epsilon\dot{\eta}_2(t) = (\epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22})\eta_2(t-h) + (\epsilon LB_1 + B_2)u(t). \tag{19}$$

2.3 느린 부시스템에서의 안정도

식 **(18)**로 표현된 느린 부시스템에 상태 지연이 있는 제어 입력 식 **(20)**을 인가하면 느린 상태로만 구성된 시스템 식 **(21)**을 얻는다.

$$u_1(t) = K_1\eta_1(t-h) \tag{20}$$

$$\dot{\eta}_1(t) = A_{\eta 1}\eta_1(t-h) \quad (21)$$
$$A_{\eta 1} = (B_1 - \epsilon HLB_1 - HB_2)K_1 + A_{\epsilon 11} - A_{\epsilon 12}L$$

정리 1과 유사하게 시스템 **식 (21)**에 대한 점진적 안정도 조건을 Newton-Leibniz 모델 변환을 이용하면 다음과 같이 구할 수 있다.

보조 정리 2. $Q = Q^T > 0,\ P = P^T > 0,\ S = S^T > 0$ 인 행렬이 존재해서 **선형 행렬 부등식 (22)**를 만족하면 시스템 **(21)**은 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} (*2) & 0 \\ 0 & hA_{\eta 1}^T SA_{\eta 1} - Q \end{bmatrix} < 0 \quad (22)$$
$$(*2) = A_{\eta 1}^T P + PA_{\eta 1} + hPA_{\eta 1}SA_{\eta 1}^T P + Q$$

증명: 다음과 같이 LKF 를 선정하자.

$$V_1(\eta_1) = \eta_1^T(t)P\eta_1(t) \quad (23)$$

$$V_2(\eta_1) = \int_{t-h}^{t} \eta_1^T(s)Q\eta_1(s)ds \quad (24)$$

$$V_3(\eta_1) = \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t} \dot{\eta}_1^T(s)S\dot{\eta}_1(s)dsd\theta \quad (25)$$

식 (23)을 미분하면 다음과 같다.

$$\dot{V}_1(\eta_1) = \eta_1^T(t-h)A^T P\eta_1(t) + \eta_1^T(t)PA\eta_1(t-h)$$

이다. 여기에 Newton-Leibniz 변환 행렬

$$\eta_1(t-h) = \eta_1(t) - \int_{t-h}^{t}\dot{\eta}_1(s)ds$$

을 이용하면 $\dot{V}(\eta_1)$은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\dot{V}_1(\eta_1) = \eta_1^T(t)A_{\eta_1}^T P\eta_1(t) + \eta_1^T(t)PA_{\eta_1}\eta_1(t) - 2\eta_1^T(t)PA_{\eta_1}\int_{t-h}^{t}\dot{\eta}_1(s)ds$$

여기서

$$\int_{t-h}^{t}\begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_1(a-h)\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}PA_{\eta_1}\\ A_{\eta_1}^T\end{bmatrix} S \begin{bmatrix}PA_{\eta_1}\\ A_{\eta_1}^T\end{bmatrix}^T \begin{bmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_1(a-h)\end{bmatrix} da \ge 0$$

를 이용하면

$$-2\eta_1^T(t)PA_{\eta_1}\int_{t-h}^{t}\dot{\eta}_1(s)ds \le h\eta_1^T(t)PA_{\eta_1}SA_{\eta_1}^T\eta_1(t) + \int_{t-h}^{t}\dot{\eta}_1^T(s)S\dot{\eta}_1(s)ds$$

이다. **식 (24)**와 **식 (25)**의 미분은 각각 다음과 같다.

$$\dot{V}_2(\eta_1) = \eta_1^T(t)Q\eta_1(t) - \eta_1^T(t-h)Q\eta_1(t-h)$$

$$\dot{V}_3(\eta_1) = h\eta_1^T(t-h)A^T SA\eta_1(t-h) - \int_{t-h}^{t}\dot{x}^T(s)S\dot{x}(s)ds$$

따라서 LKF 의 미분을 더한 결과는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{V}_1(\eta_1) + \dot{V}_2(\eta_1) + \dot{V}_3(\eta_1) \le\ & \eta_1^T(t)A_{\eta_1}^T P\eta_1(t) \\ &+ \eta_1^T(t)PA_{\eta_1}\eta_1(t) \\ &+ \eta_1^T(t)Q\eta_1(t) - \eta_1^T(t-h)Q\eta_1(t-h) \\ &+ h\eta_1^T(t-h)A^T SA\eta_1(t-h) \\ &+ h\eta_1^T(t)PA_{\eta_1}SA_{\eta_1}^T\eta_1(t)\end{aligned}$$

따라서 **식 (22)**가 성립하면 시간 지연 시스템 **식 (21)**은 점진적으로 안정하다. □

2.4 빠른 부시스템에서의 안정도

식 (19)로 표현된 빠른 부시스템에 제어입력 **식 (26)**을 인가하면 빠른 상태로만 구성된 시스템 **식 (27)**을 구축할 수 있다.

$$u_2(t) = K_2\eta_2(t-h) \quad (26)$$

$$\epsilon\dot{\eta}_2(t) = \left(\epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22} + (\epsilon LB_1 + B_2)K_2\right)\eta_2(t-h) \quad (27)$$

느린 부시스템에서와 같이 빠른 부시스템에서도 다음 보조 정리 3 을 만족하면 시스템 **식 (27)**은 점진적으로 안정하다.

보조 정리 3. $Q = Q^T > 0,\ P = P^T > 0$ 인 행렬이 존재해서 **선형 행렬 부등식 (28)**을 만족하면 시스템 **식 (27)**은 점진적으로 안정하다.

$$\begin{bmatrix} (*3) & 0 \\ 0 & \dfrac{h}{\epsilon}A_{\eta_2}^T A_{\eta_2} - \epsilon Q \end{bmatrix} < 0 \quad (28)$$
$$(*3) = A_{\eta_2}^T P + PA_{\eta_2} + \frac{h}{\epsilon}PA_{\eta_2}A_{\eta_2}^T P + \epsilon Q$$

여기서 $A_{\eta 2} = \epsilon LA_{\epsilon 12} + A_{\epsilon 22} + (\epsilon LB_1 + B_2)K_2$ 이다.

증명: 여기서는 Lyapunov-Krasovskii 범함수를 다음과 같이 선정한다.

$$V_1(\eta_2) = \eta_2^T(t)P\eta_2(t) \quad (29)$$

$$V_2(\eta_2) = \int_{t-h}^{t}\eta_2^T(s)Q\eta_2(s)ds \quad (30)$$

$$V_3(\eta_2) = \int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\dot{\eta}_2^T(s)S\dot{\eta}_2(s)dsd\theta \quad (31)$$

식 **(31)**에서 $S=I$ 로 놓은 후 보조정리 2의 증명 방법을 적용하면 **부등식 (28)**을 구할 수 있다. □

2.5 합성 제어 시스템에서의 안정도

식 **(20)**, 식 **(26)**, 그리고 식 **(16)**에 의해서 합성 제어 $u(t)$는 다음과 같다.

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=[K_1\ \ K_2]T\begin{bmatrix}x_1(t-h)\\x_2(t-h)\end{bmatrix} \tag{32}$$

각 부시스템에서 구한 제어 입력과 전체 시스템에 인가할 제어 입력과의 관계는 다음과 같이 정리된다.

보조 정리 4. 보조정리 2 와 3을 만족하면 **특이섭동 시스템 식 (11)**은 점근적으로 안정하다.

증명: 각 부시스템 **식 (18)** 및 **식 (19)** 가 안정하면 Chang 변환 행렬 T가 상수 행렬이면서 비특이행렬(nonsingular matrix) 이므로 $\left[x_1^T(t)\ \ x_2^T(t)\right]^T=T^{-1}\left[\eta_1^T(t)\ \ \eta_2(t)^T\right]^T$ 이다. $\|\left[\eta_1^T(t)\ \ \eta_2(t)^T\right]^T\|<\alpha,\alpha>0$ 이면

$\|T^{-1}\left[\eta_1^T(t)\ \ \eta_2(t)^T\right]^T\|\le\|T^{-1}\|\ \|\left[\eta_1^T(t)\ \ \eta_2(t)^T\right]^T\|$

이므로 $\|\left[x_1^T(t)\ \ x_2^T(t)\right]^T\|\le\alpha$ 이 성립하여 전체 시스템은 안정하다. □

시간 지연이 포함된 특이섭동 시스템의 안정조건을 구한 정리 1 의 경우에는 LMI를 풀 때 $3.5n^2$개의 변수를 구해야 하지만 두 개의 부 시스템으로 분리된 접근법에서 보조정리 2 및 3을 이용할 때는 $3n^2$개의 변수만을 구하면 된다.

3. 수치 예

다음과 같이 시간 지연을 갖는 특이 섭동 시스템을 고려하자.

$$E_\epsilon\dot{x}(t)=Ax(t-h)+Bu(t) \tag{33}$$

여기서

$$E_e=\begin{bmatrix}I_2&0_2\\0_2&\epsilon I_2\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}5&9&0&0\\0&0&0.345&0\\2&0.524&0.465&0.262\\0&1&2&-5\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1.2\\0.01\\0.1\\0.0226\end{bmatrix}$$

이고, $h=0.1,\ \epsilon=0.09$ 이다.

식 (15)의 Chang 변환 행렬은 비대칭 Riccati **방정식 (13)** 및 **(14)**를 풀면

$$L=\begin{bmatrix}3.7545&1.4909\\1.4906&0.3749\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}0.0075&0.0003\\0.0536&0.0028\end{bmatrix}$$

로 구해지고 **식 (21)**로 표현된 느린 부시스템의 파라미터는 다음과 같이 구해진다.

$$A_{\eta1a}=A_{\epsilon11}-A_{\epsilon12}L=\begin{bmatrix}5.0&9.0\\-1.2953&-0.5144\end{bmatrix}$$
$$A_{\eta1b}=B_1-\epsilon HLB_1-HB_2=\begin{bmatrix}1.1961\\-0.0177\end{bmatrix}$$

부등식 (22)을 슈어 보수를 이용하면

$$\begin{bmatrix}(*)&0&0\\0&-Q&A_{\eta1}^T\\0&A_{\eta1}&-\frac{1}{h}S^{-1}\end{bmatrix}<0 \tag{34}$$
$$(*)=A_{\eta1}^TP+PA_{\eta1}+hPA_{\eta1}SA_{\eta1}^TP+Q$$

와 같이 되고, $Z_1=P^{-1}$로 정의한 후 **부등식 (34)** 양변에 $diag\{Z_1,\ Z_1\}$ 를 곱하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}(**)&0&0\\0&-Z_1QZ_1&Z_1(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)^TZ_1\\0&Z_1(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)Z_1&-\frac{1}{h}Z_1S^{-1}Z_1\end{bmatrix}<0 \tag{35}$$
$$(**)=Z_1(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)^T+(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)Z_1$$
$$+hP(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)S(A_{\eta1a}+A_{\eta1b}K_1)^T+Z_1QZ_1$$

여기서 $F_1=K_1Z_1, L_1=Z_1QZ_1,\ \ J_1=K_1S,\ \ M_1=K_1SK_1^T,$ $N_1=Z_1S^{-1}Z_1,\ \ V_1=Z_1A_{\eta_1b}F_1,\ \ W_1=Z_1A_{\eta_1a}Z_1$와 같이 정의하여 변수 변경하면 **부등식 (35)**는

$$\begin{bmatrix}(※)&0&0\\0&-L_1&W_1^T+V_1^T\\0&W_1+V_1&-\frac{1}{h}N_1\end{bmatrix}<0 \tag{36}$$
$$(※)=Z_1A_{\eta1a}^T+A_{\eta1a}(Z_1+hSA_{\eta1a}^T+hJ_1^TA_{\eta1b}^T)$$
$$+A_{\eta1b}(hJ_1A_{\eta1a}^T+F_1+hM_1^TA_{\eta1b}^T)+L_1+F_1^TA_{\eta1b}^T$$

와 같이 LMI 형태로 변환된다. **선형 행렬 부등식 (36)**에서 $F_1,\ Z_1$을 구한 후 **식 (20)**으로 표현된 느린 부시스템의 제어입력 이득은 다음과 같이 구해진다.

$$K_1=F_1Z_1^{-1}=[-8.2433\ \ -5.7770] \tag{37}$$

마찬가지로 위에서 구해진 L,H를 적용하면 빠른 부시스템 **식 (27)**의 파라미터는 다음과 같이 구해진다.

$$A_{\eta2a}=\epsilon LA_{\epsilon12}-A_{\epsilon22}=\begin{bmatrix}5.2130&2.9111\\22.2339&-55.5556\end{bmatrix}$$
$$A_{\eta2b}=\epsilon LB_1+B_2=\begin{bmatrix}0.5068\\0.1839\end{bmatrix}$$

합동 변환($Z_2=P^{-1}$)과 $F_2=K_2Z_2,\ \ L_2=\epsilon Z_2QZ_2,$ $M_2=K_2K_2^T,N_2=Z_2Z_2,V_2=Z_2A_{\eta_2b}F_2,\ \ W_2=Z_2A_{\eta_2a}Z_2$ 와 같이 변수 변경하면 **부등식 (28)**을 슈어 보수한 행렬은

$$\begin{bmatrix} (\triangle) & 0 & 0 \\ 0 & -L_2 & W_2^T + V_2^T \\ 0 & W_2 + V_2 & -\frac{\epsilon}{h} N_2 \end{bmatrix} < 0 \tag{38}$$

$$\begin{aligned}(\triangle) &= Z_2 A_{\eta 2a}^T + F_2^T A_{\eta 2b}^T + A_{\eta 2a} Z_2 + A_{\eta 2b} F_2 \\ &+ h A_{\eta 2a} A_{\eta 2a}^T + h A_{\eta 2b} K_2 A_{\eta 2a}^T + h A_{\eta 2a} K_2^T A_{\eta 2b}^T \\ &+ h A_{\eta 2b} M_2^T A_{\eta 2b}^T + L_2\end{aligned}$$

와 같이 LMI 형태로 변환된다. 선형행렬 부등식 **(38)**에서 F_2, Z_2를 구한 후 식 **(26)**으로 표현된 느린 부시스템의 제어입력 이득은 다음과 같이 구해진다.

$$K_2 = F_2 Z_2^{-1} = [-68.8366 \quad -64.1008] \tag{39}$$

식 **(32)**로 표현된 전체 시스템의 제어입력은 식 **(37)**과 식 **(39)**에서 구해진 부시스템들의 제어입력을 이용하면 $K = [-277.62 \quad 9.55 \quad 128.01 \quad -511.99]$와 같이 구해진다.

4. 결 론

본 논문에서는 시간지연을 갖는 특이 섭동 시스템의 안정화 조건을 전체 시스템을 고려한 경우와 Chang 변환을 통해 시스템을 저차의 느린 부시스템과 빠른 부시스템으로 완전 분리한 후 각 부시스템에서 안정화 조건을 제시했다. 시간지연을 고려하여 Lyapunov-Krasovskii 범함수에 이차 적분을 포함한 덜 보수적인 방법으로 안정화 조건을 보였다. 시스템을 저차의 시스템으로 분리하고 안정화 조건을 선형 행렬 부등식을 이용해서 구할 때 변수의 개수를 줄일 수 있음을 보였고 수치 예를 통해 그 타당성을 보였다.

후 기

이 연구는 2016년도 경상대학교 신임교원 연구기반 조성 연구비에 의해 수행되었음.

References

[1] P. Kokotovic, H. Khali, and J. O'Reilly, Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

[2] B. S. Kim, "Stabilizing controller design for time-delay singularly perturbed systems by H∞ norm and lambert W function," The Transactions of the Korean Institute of Electrical Engineers, vol. 62, no. 8, pp. 1144-1150, 2014 (in Korean).

[3] H. S. Seong and H. S. Choi, "Robust control of a heave compensation system for offshore cranes considering the time-delay," Journal of the Korean Society of Marine Engineering, vol. 41, no. 1, pp. 105-110, 2017 (in Korean).

[4] S. L. Lee, Y. H. Lee, J. K. Ahn, J. K. Son, K. T. Ryu, and M. O. So, "PID control of unstable processes with time delay," Journal of the Korean Society of Marine Engineering, vol. 33, no. 5, pp. 721-728, 2009 (in Korean).

[5] J. Richard, "Time-delay systems: An overview of some recent advances and open problems," Automatica, vol. 39, no. 10, pp. 1667-1694, 2003.

[6] R. Ren, Z. Zou, and X. Wang, "A two-time scale control law based on singular perturbations used in rudder roll stabilization of ships," Ocean Engineering, vol. 88, pp. 488-498, 2014.

[7] S. Liu, C. Xu, and L. Zhang, "Robust course keeping control of a fully submerged hydrofoil vessel without velocity measurement: An iterative learning approach," Mathematical Problems in Engineering, 2017. [Online]. Available: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2017/7979438

[8] P. G. Park, W. L. Lee, and S. Y. Lee, "Stability on time delay systems: A survey," Journal of Institute of Control, Robotics and Systems, vol. 20, no. 3, pp. 289-297, 2014 (in Korean).

[9] S. Pan, C. Chen and J. Hsieh, "Stability analysis for a class of singularly perturbed systems with multiple time delays," Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, vol. 126, no. 3, pp. 462-466, 2004.

[10] Z. Shao and J. Rowland, "Stability of time-delay singularly perturbed systems," IEE Proceedings - Control Theory and Applications, vol. 142, no. 2, pp. 111-113, 1995.

[11] B. S. Kim and S. W. Ahn, "Stabilizing controller design for time-delay pure singularly perturbed systems via lambert W function," Journal of the Korean Society for Power System Engineering, vol. 18, no. 1, pp. 120-127, 2014 (in Korean).

[12] K. W. Chang, "Singular perturbations of a general boundary value problem," SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 3, no. 3, pp. 520-526, 1972.

[13] F. Sun, L. Zhou, Q. Zhang, and Y. Shen, "Stability bound analysis and synthesis for singularly perturbed systems with time-varying delay," Mathematical Problems in Engineering, 2013. [Online]. Available: https://www.hindawi.com/journals/mpe/2013/517258

[14] Z. Gajic and M. T. Lim, Optimal Control of Singularly Perturbed Linear Systems and Applications : High-Accuracy Techniques, New York: Taylor & Francis Inc, 2001.